JAG 夏合宿 2017 Day 3 セット
D: Janken Master

原案: **松本**
解答: @not_522, @kurome_u_u, @tubo28
解説: @tubo28

2017/9/24

問題概要

- n 人でじゃんけん大会をする．
- 優勝者が唯一に決まるまでラウンドを繰り返す．
- 各ラウンドでは，勝ち残っている人が一斉に手を出し，
  - 勝敗が決まったときは勝者のグループのみが残り，敗者のグループは敗退する．
  - あいこのときは，TopCoder じゃんけんを行う (レートが一番高い人が勝ち)．
- あなた以外の人は，グー・パー・チョキを一定の確率で毎回独立に選択する．
- あなたは，各人の確率及びレーティングを知っている．
- あなたが最後に勝ち残る確率を最大化するように立ちまわったときの，勝ち残る確率を計算しなさい．

解法

ビット DP．

$dp(S, d)$ を，「自分と他人の集合 S がまだ勝ち残っていて，$d = 0$ or 1 回あいこが起こっているときに，最適な手を選んだときの勝率」と定義する．

- 以降グー，パー，チョキをそれぞれ r, p, s，人 i がそれらを出す確率をそれぞれ r_i, p_i, s_i と書く．
- $h = r, p, s$ に対し，$all(S, h)$ を人の集合 S の全員が h を出す確率 $(=\prod_{i \in S} h_i)$ とおく．
- 唯一の勝者になることを「優勝」各ラウンドで勝つことを「じゃんけんで勝つ」と区別して書く．

DP の基底

- $dp(\emptyset, 0) = 1$．
- $dp(S, 1)$ $(S \neq \emptyset)$ は，自分が S の全員よりレートが高ければ 1，そうでなければ 0．

$dp(S, 0)$ $(S \neq \emptyset)$ の遷移

あるラウンドで自分が r を選んだときに，じゃんけんに勝つ場合の優勝確率について考える．自分と $T \subsetneq S$ がじゃんけんに勝つ確率は

$$all(T, r) \times all(S - T, s) \tag{1}$$

従って，じゃんけんに勝ち，かつ優勝する確率は

$$\sum_{T \subsetneq S} ((1) \times dp(T, 0)) \tag{2}$$

$dp(S,0)\ (S \neq \emptyset)$ の遷移

あるラウンドで自分が r を選んだときに，あいこになる場合の優勝確率について考える．じゃんけんに勝つ確率は

$$all(T,r) \times all(S-T,s) \tag{3}$$

負ける確率は

$$all(T,r) \times all(S-T,p) \tag{4}$$

したがって，じゃんけんであいこになり，かつ優勝する確率は

$$\left[1 - \sum_{T \subsetneq S} ((3)+(4))\right] \times dp(S,1) \tag{5}$$

$dp(S, 0)$ $(S \neq \emptyset)$ の遷移

- r, p, s それぞれで，$T \subsetneq S$ のループを回して，(2)+(5) を計算すると，各手を出したときの優勝確率になる．
- それが最大になる手を選ぶ．
- 答えは $dp(\{1, \dots, n\}, 0)$．

計算量など

- $all(S,h)$ は $O(n2^n)$ かけて事前に計算しておく．
- S,T $(T \subsetneq S \subseteq \{1,\ldots,n\})$ の列挙は次のようにすると速い．

```
for (int S = 0; S << (1 << n); ++S) {
    for (int T = S; T >= 0; --T) {
        T &= S;
        if (T != S) {
            // ここでなにかする
        }
    }
}
```

  - 蟻本第 2 版 p.144 などを参照
- S と T の i ビット目は (0,0),(1,0),(1,1) の 3 通り．
- ゆえに計算量は $O(3^n)$．

コメント

- $O(n3^n)$, $O(4^n)$ なども上手く実装すれば通るかもしれませんが，まあいいかという事になりました．
- 日本式の順番 (グ・チ・パ) と英語式の順番 (グ・パ・チ) を間違えないようにしましょう．
- ビット演算で部分集合を列挙する方法は書けるようにすべき (覚える or ライブラリ化) ですが，それ以外の $o(4^n)$ の実装がアドホックにできると強いですね．
  - cf: チーム全完 RTA の実装 $\rightarrow$ `http://jag2017summer-day3.contest.atcoder.jp/submissions/1624706`

統計情報

- AC/**提出したチーム**：21/23
- First AC：molamola (39:18)