

# 模擬地区予選2016

## H: Pipe Fitter and the Fierce Dogs

原案：吉田

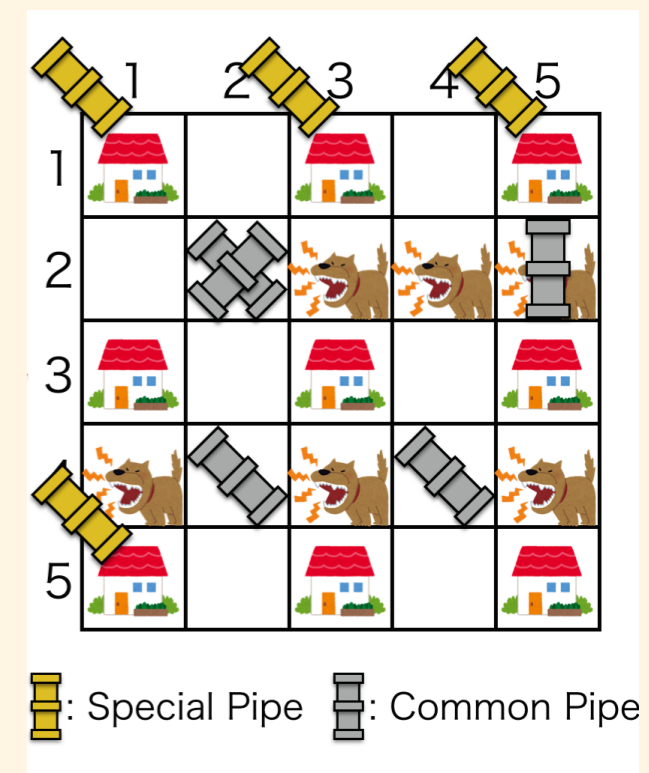
問題文：井上

解答：井上・水野

解説：井上

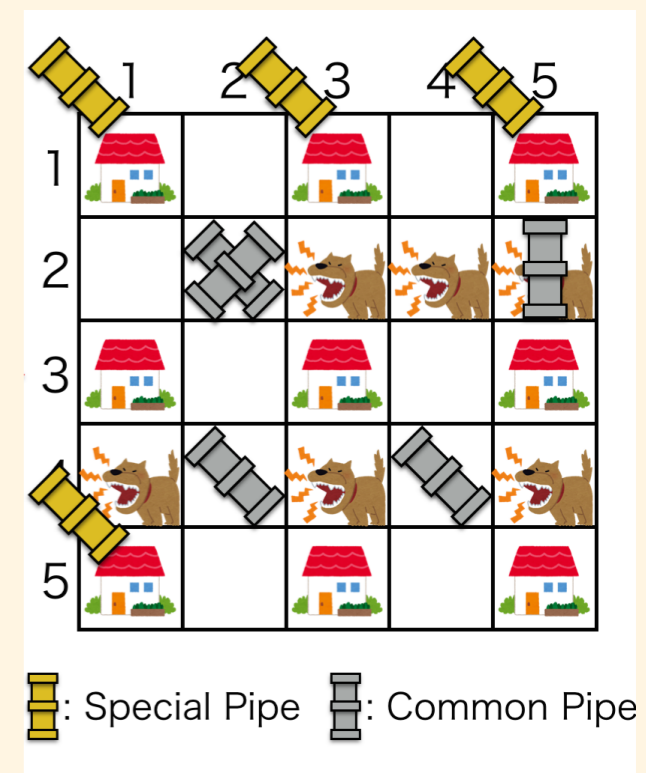
# 問題概要

- $H \times W$ のグリッド上で、 $x, y$ 座標ともに奇数の地点に家がある
- 北から南に1つまで隣の家へと配管を伸ばしてつなぐ  
(枝分かれ・合流なし)
- 配管の開始地点は $K$ 箇所まで
- 犬がいる座標を配管が通るとコスト2、通常は1
- 全ての家に配管を通すコストを最小化せよ
- 制約:  $1 \leq H, W \leq 10^4$ ,  $1 \leq K \leq 10^8$ ,  $1 \leq \text{犬} \leq 10^5$



# 問題概要

- $H \times W$ のグリッド上で、 $x, y$ 座標ともに奇数の地点に家がある
- 有向グラフ  
北から南に1つまで隣の家へと配管を伸ばしてつなぐ  
(枝分かれ・合流なし) パス
- 配管の開始地点はK箇所まで
- 犬がいる座標を配管が通るとコスト2、通常は1
- 全ての家に配管を通すコストを最小化せよ 被覆
- 制約:  $1 \leq H, W \leq 10^4$ ,  $1 \leq K \leq 10^8$ ,  $1 \leq \text{犬} \leq 10^5$



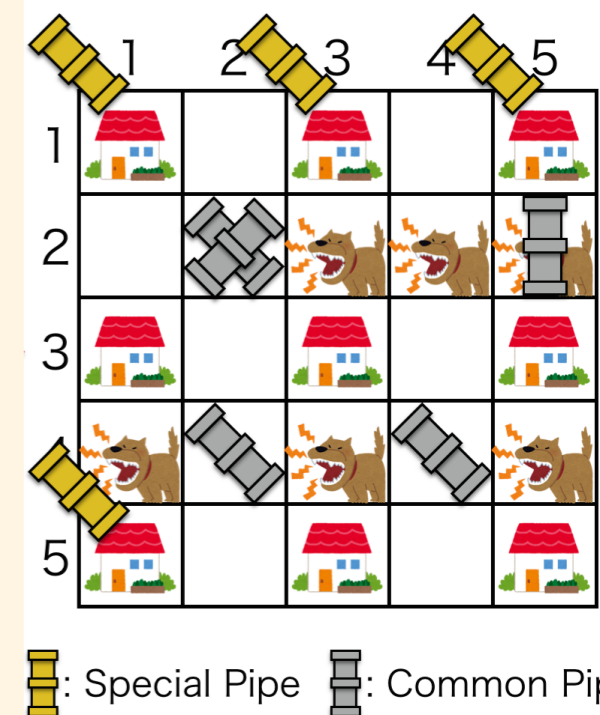
# 問題概要

DAGの最小コストパス被覆！！

最小重み二部マッチング！！

最小費用流！！

- 犬がいる座標を配管が通るとコスト2、通常は1
- 全ての家に配管を通すコストを最小化せよ
- 制約:  $1 \leq H, W \leq 10^4$ ,  $1 \leq K \leq 10^8$ ,  $1 \leq \text{犬} \leq 10^5$



# 問題概要

~~DAGの最小コストで全ノードを被覆!!!~~

~~最小重み二部マッチング!!!~~

~~最小費用流!!!~~

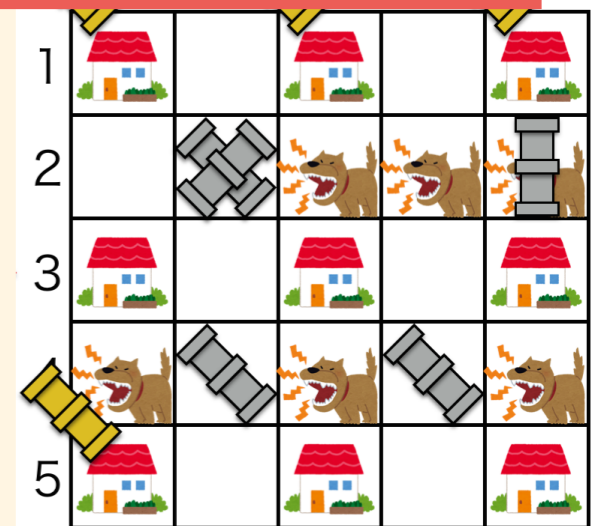
• 人がいる庄屋を配管が通るとコストが、市は1  
地更

• 全ての家に配

**TLE:  $O(H^3W^3)$**

• 制約:  $1 \leq H, W$

**※蟻本等参照**



# 考察 (1): 特殊なパイプの本数

- $K < (W/2) + 1$  のとき:

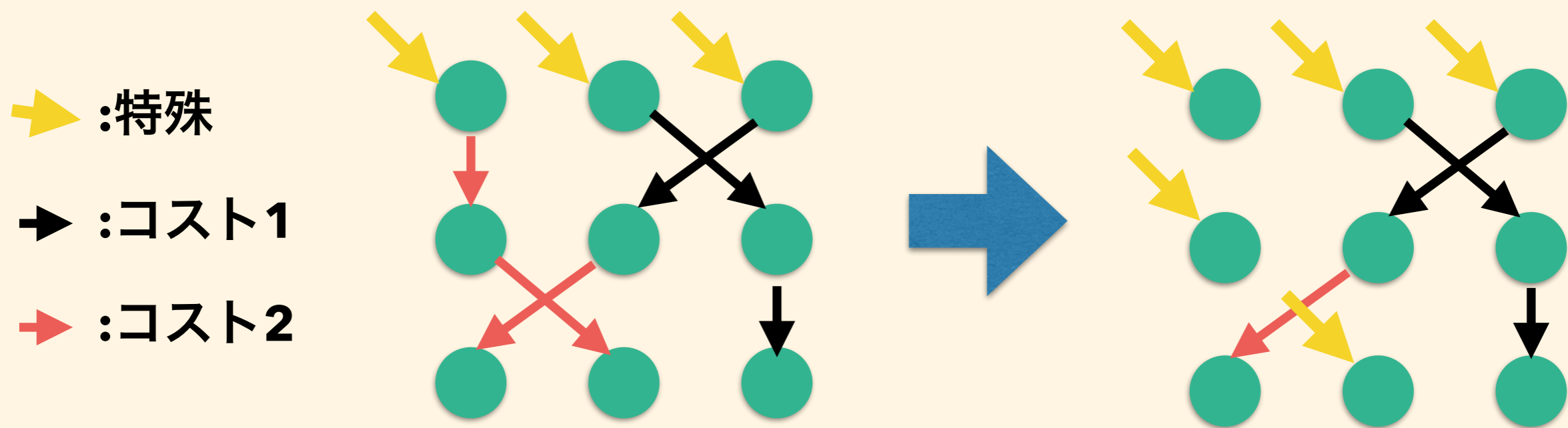
パスが  $(W/2) + 1$  本作れないので無理

- $K > (W/2) + 1$  のとき:

$(W/2) + 1$  本のパスを最適化してからコストの重い

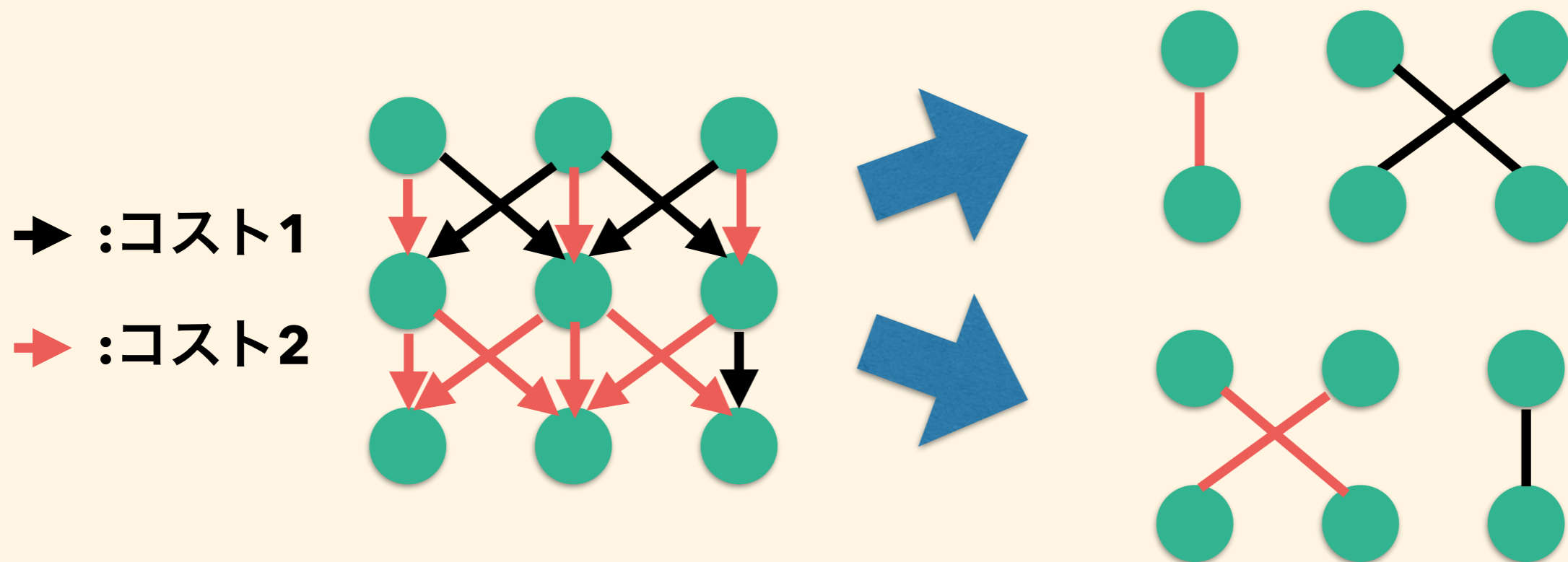
パイプを特殊なパイプに変える

→  $K = (W/2) + 1$  の最適解が求めればOK



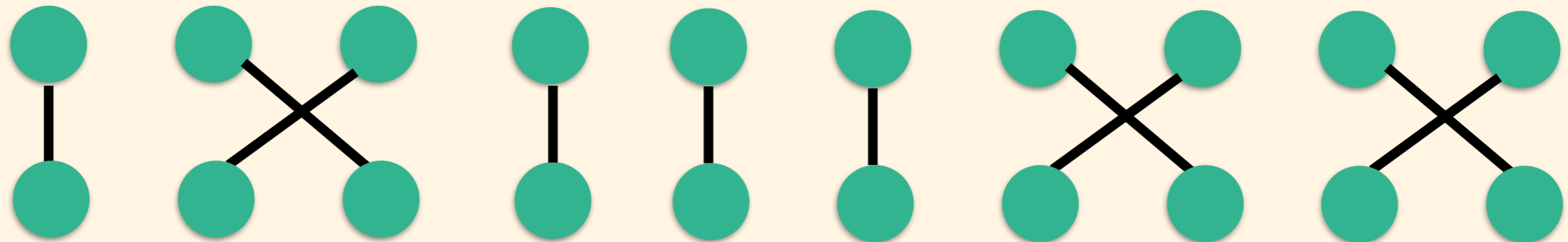
# 考察 (2): グラフの分割

- $K = (W/2) + 1$  のとき、どの段でも、すべての家から次のすべての家と1対1の関係がある
- 各段で独立に二部マッチングを解けばよい
  - 普通にやると1回  $O(W^3) \times H$  でまだ遅い



# 考察 (3): グラフの特殊性

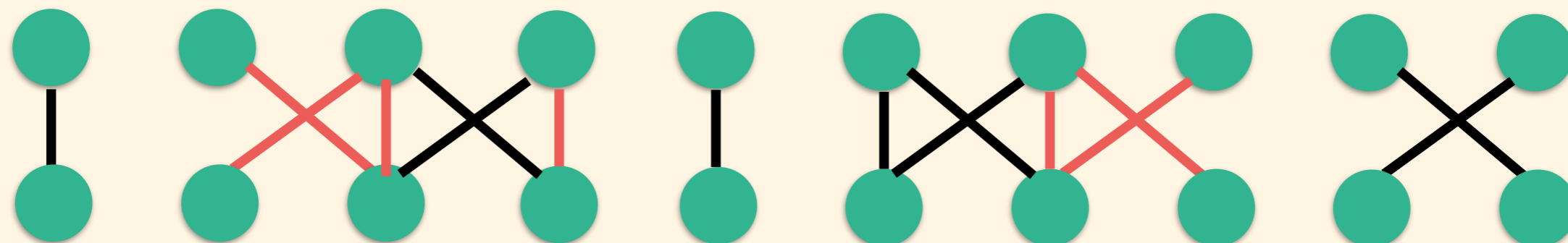
- マッチングは必ず  $\times$  か  $|$  が繰り返されるような形になる
- これを利用することで、例えば左から見ていくDPで最適化が  $O(W)$  で解ける  $\rightarrow O(HW)$ , 間に合う
  - $dp[i] = \min(dp[i-1] \text{ 棒コスト}, dp[i-2] + \text{バツコスト})$





# 考察 (4): 高速化

- アドホックな考察で犬の数にしか依存しない計算量まで落とせる
  - 同じ段で犬が偶数 (バツのコストに関わる) にいるところだけ考えて、コスト1の辺だけ使えるか考える
    - 間の家が偶数個ならバツで埋めればOK
    - 奇数個なら、奇数番目の家の縦に犬がいなければOK
- $O(\text{犬} \log \text{犬})$



# ジャッジ解

- 井上 (C++,  $O(\text{犬} \log \text{犬})$ ) : 59 行, 1208 bytes
- 水野 (C++,  $O(\text{HW})$ ) : 54行, 1437 bytes
- 水野 (C++,  $O(\text{犬} \log \text{犬})$ ) : 57行, 1330 bytes

# 統計情報

- ACチーム数 / 提出チーム数
  - 4 / 9 (44.4%)
- First Acceptance
  - on-line: Cxiv (184:46)
  - on-site: Cxiv (184:46)