

模擬国内予選2016

F: 土地相続

原案: 田中

問題文: 矢野

解答: 井上・澤

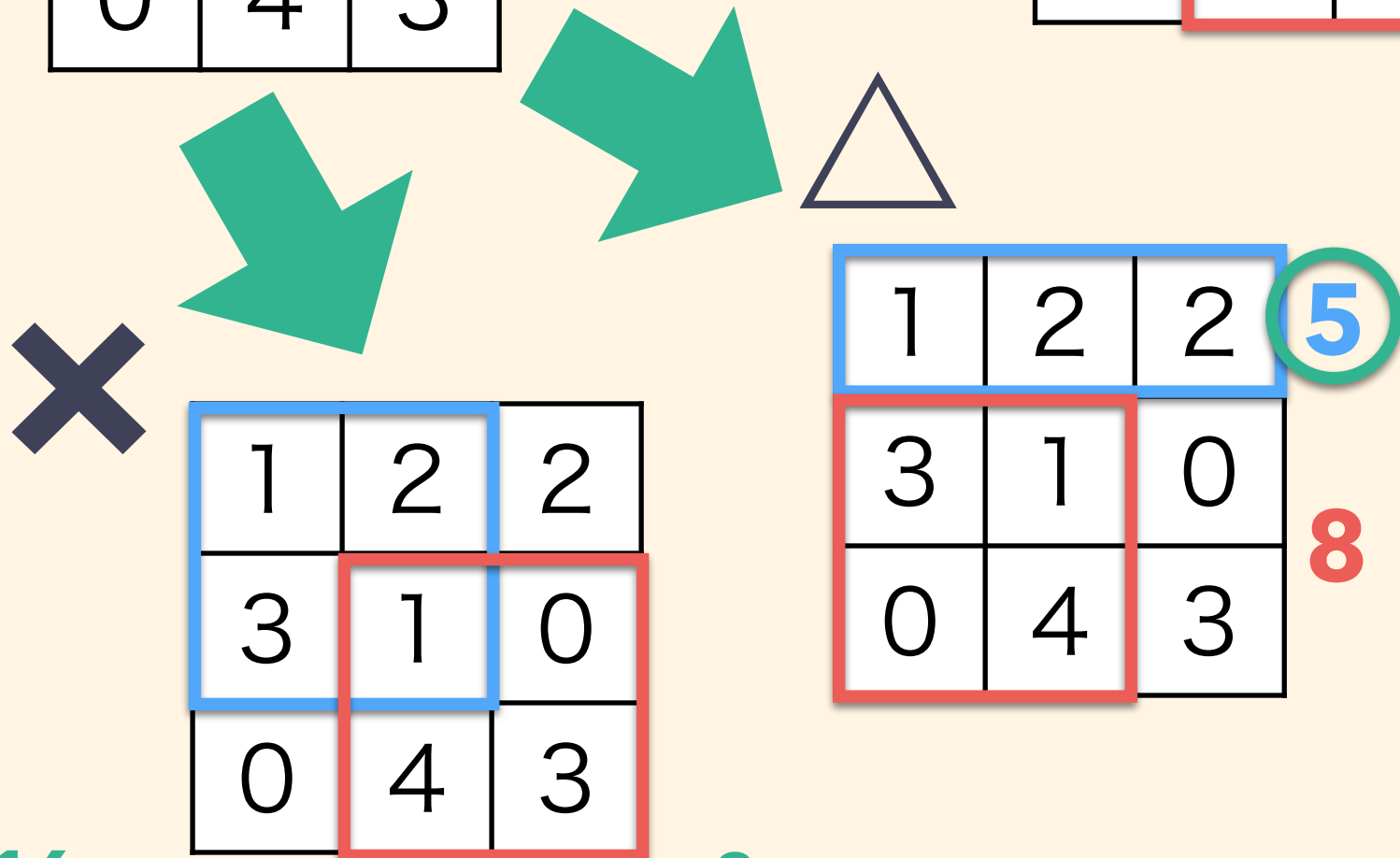
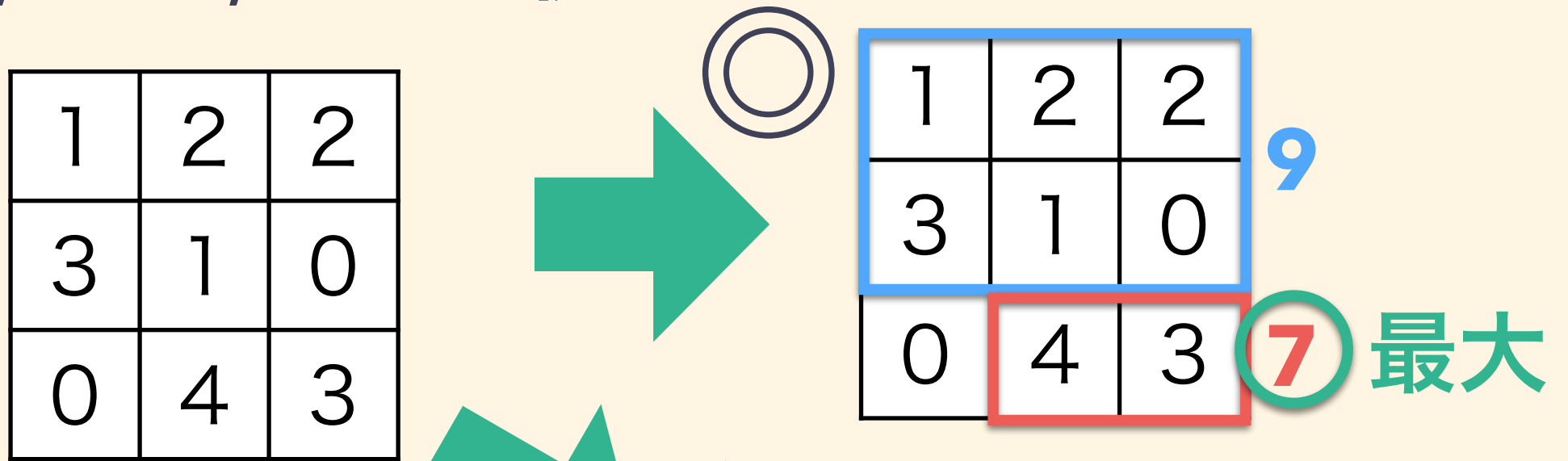
解説: 井上

問題概要

- $H \times W$ マスの長方形の土地がある
 - それぞれのマスは価値 $a_{i,j}$ (非負整数) を持つ
- これを被りがない N 個の長方形で囲う
 - どの長方形にも囲われないマスがあってもよい
- それぞれの長方形が囲う価値の和のうち、最小値を最大化するといくらになるか？
- 制約: $2 \leq H, W \leq 200, 2 \leq N \leq 4, 0 \leq a_{i,j} \leq 10^4$

問題例

- $H=3, W=3, N=2$ の例



問題概要

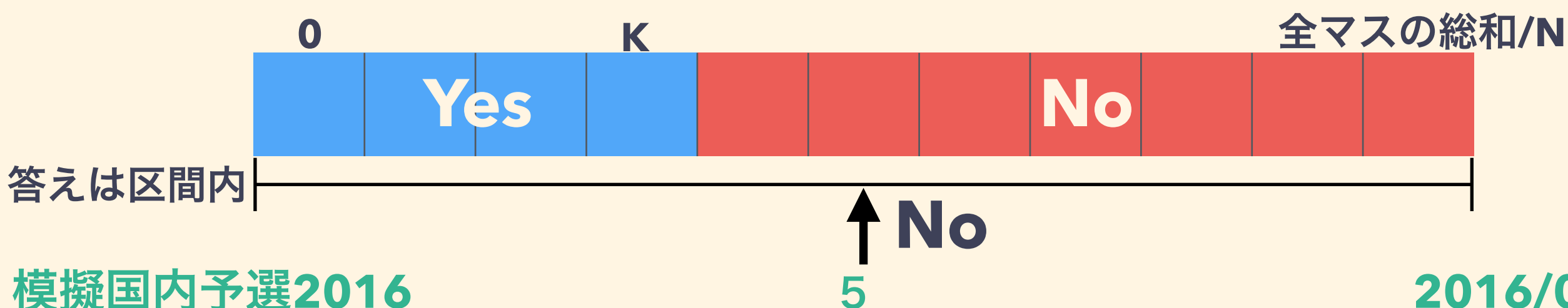
- $H \times W$ マスの長方形の土地がある
 - それぞれのマスは価値 $a_{i,j}$ (非負整数) を持つ
- これを被りがない N 個の長方形で囲う
 - どの長方形にも囲われないマスがあってもよい
- それぞれの長方形が囲う価値の和のうち、

最小値を最大化するといくらになるか？

- 制約: $2 \leq H, W \leq 200, 2 \leq N \leq 4, 0 \leq a_{i,j} \leq 10^4$

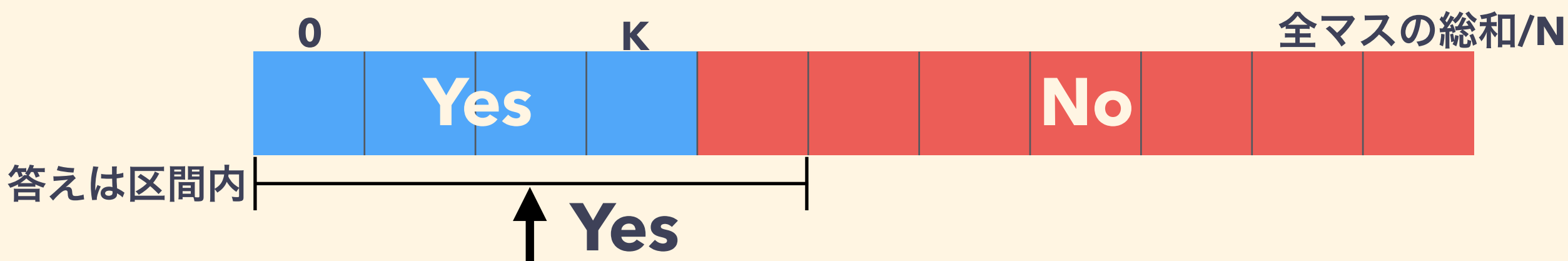
解法のアイデア: 二分探索

- 最小値を指定した決定問題が解けると仮定
 - 価値の総和がすべて X 以上になるような N 分割は存在するか?
 - Yes \rightarrow 答えは X 以上、No \rightarrow 答えは X 未満
- ある値 K を境にYes, Noが変わる $\rightarrow K$ が答え
 - K は決定問題を使いながら二分探索できる



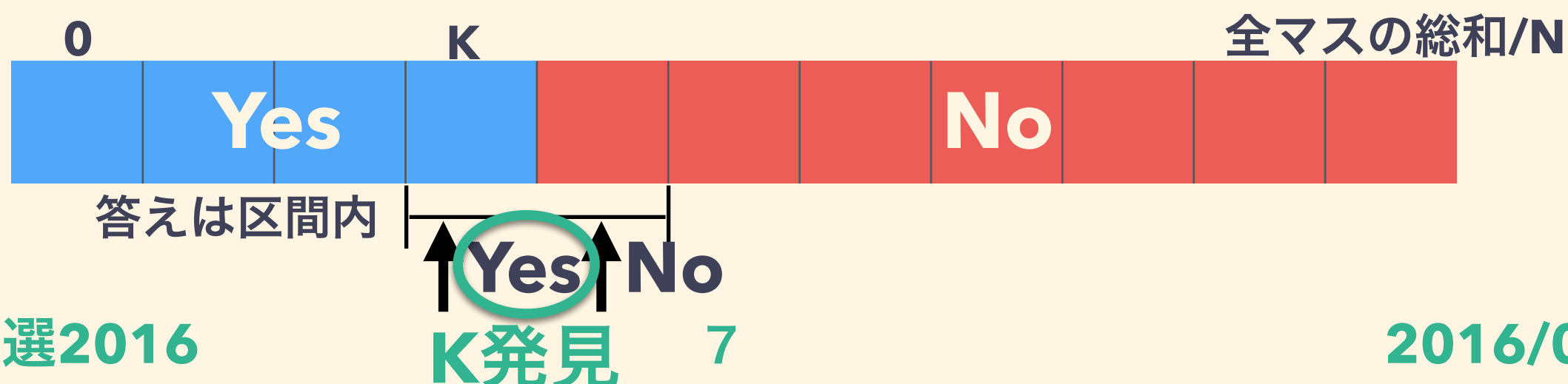
解法のアイデア: 二分探索

- 最小値を指定した決定問題が解けると仮定
 - 価値の総和がすべて X 以上になるような N 分割は存在するか?
 - Yes \rightarrow 答えは X 以上、No \rightarrow 答えは X 未満
- ある値 K を境にYes, Noが変わる $\rightarrow K$ が答え
 - K は決定問題を使いながら二分探索できる



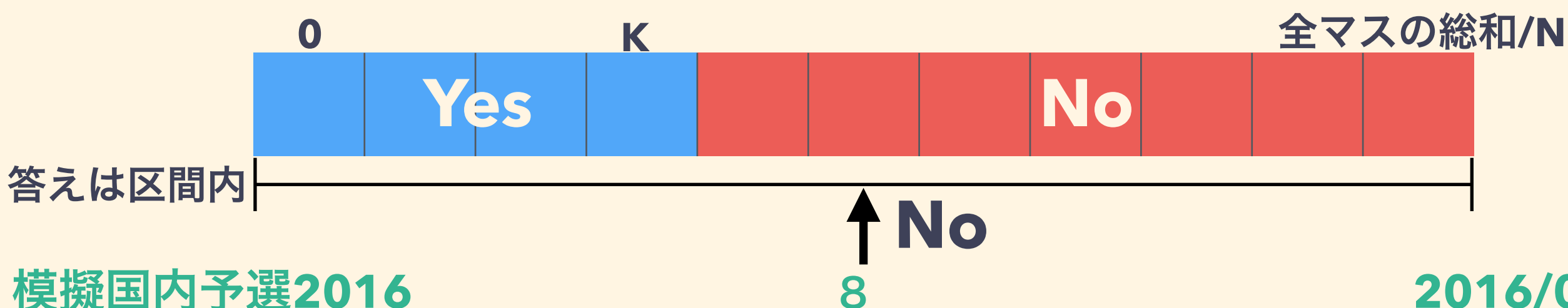
解法のアイデア: 二分探索

- 最小値を指定した決定問題が解けると仮定
 - 価値の総和がすべて X 以上になるような N 分割は存在するか?
 - Yes \rightarrow 答えは X 以上、No \rightarrow 答えは X 未満
- ある値 K を境にYes, Noが変わる $\rightarrow K$ が答え
 - K は決定問題を使いながら二分探索できる



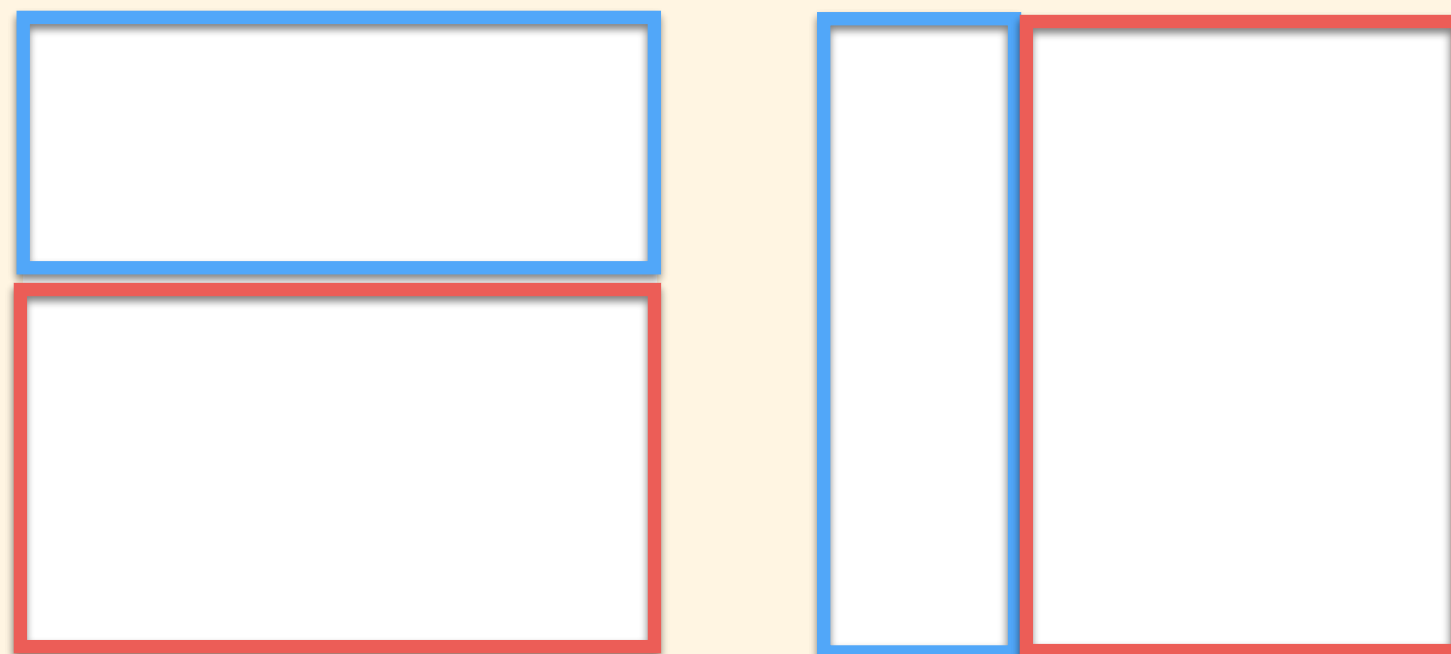
解法のアイデア: 二分探索

- 二分探索は区間が半分になっていくので、決定問題を解く回数は $O(\log(\text{全マスの総和}/N))$
- 全マスの総和 = $\sum a_{i,j} \leq 4 \times 10^8$ なので 30 回弱
- 「最小値の最大値」が知りたいときに決定問題を解いて二分探索するのは典型的なテク
- あとは決定問題が解ければOK



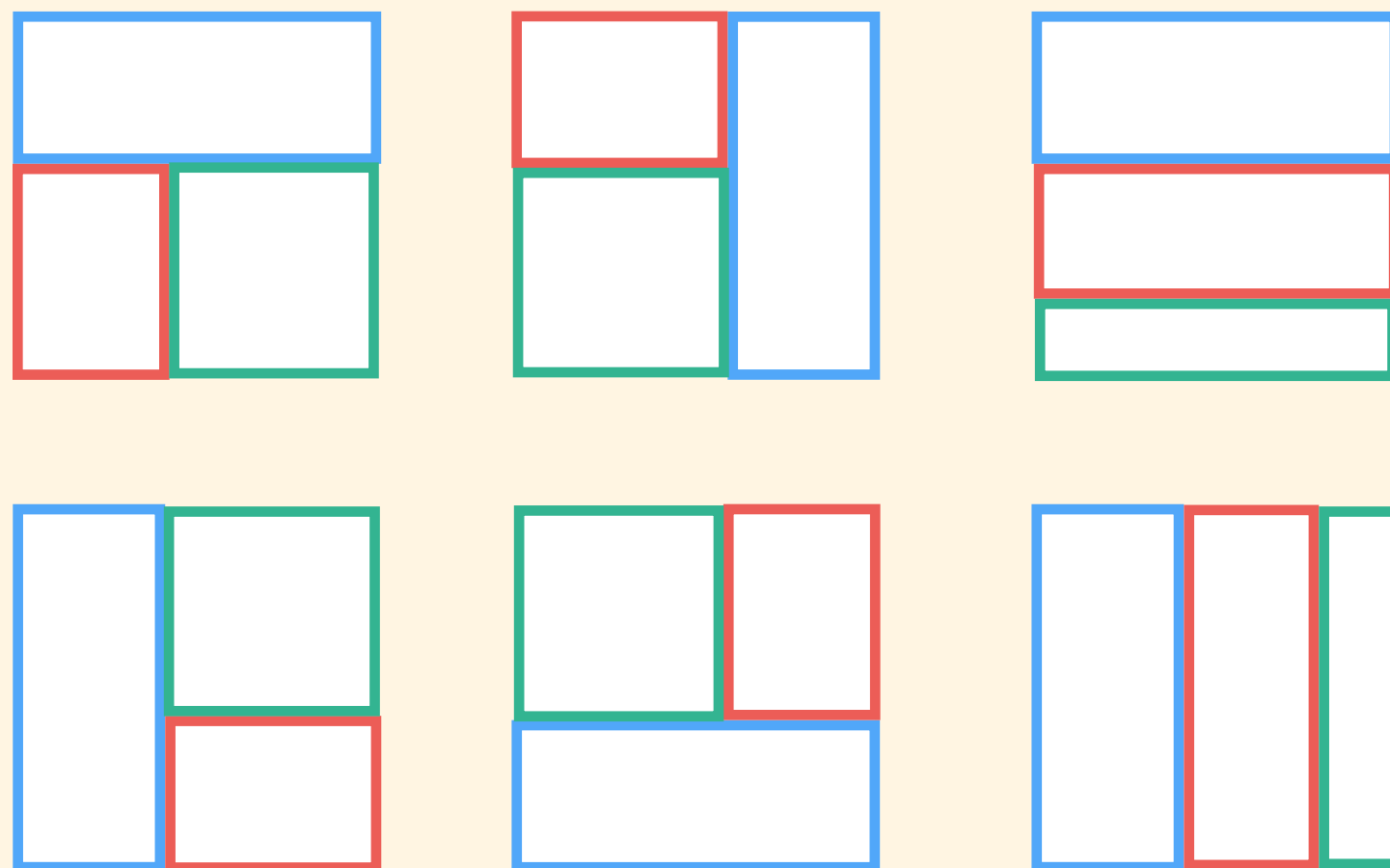
決定問題 ~N=2の場合~

- 分割の仕方は縦・横の2通りしかない
- どこで分割するかが $W+H$ 通りなので試す
- 価値が非負整数なので無駄に余らせても得しない
- 計算量: $O((H+W)^2)$



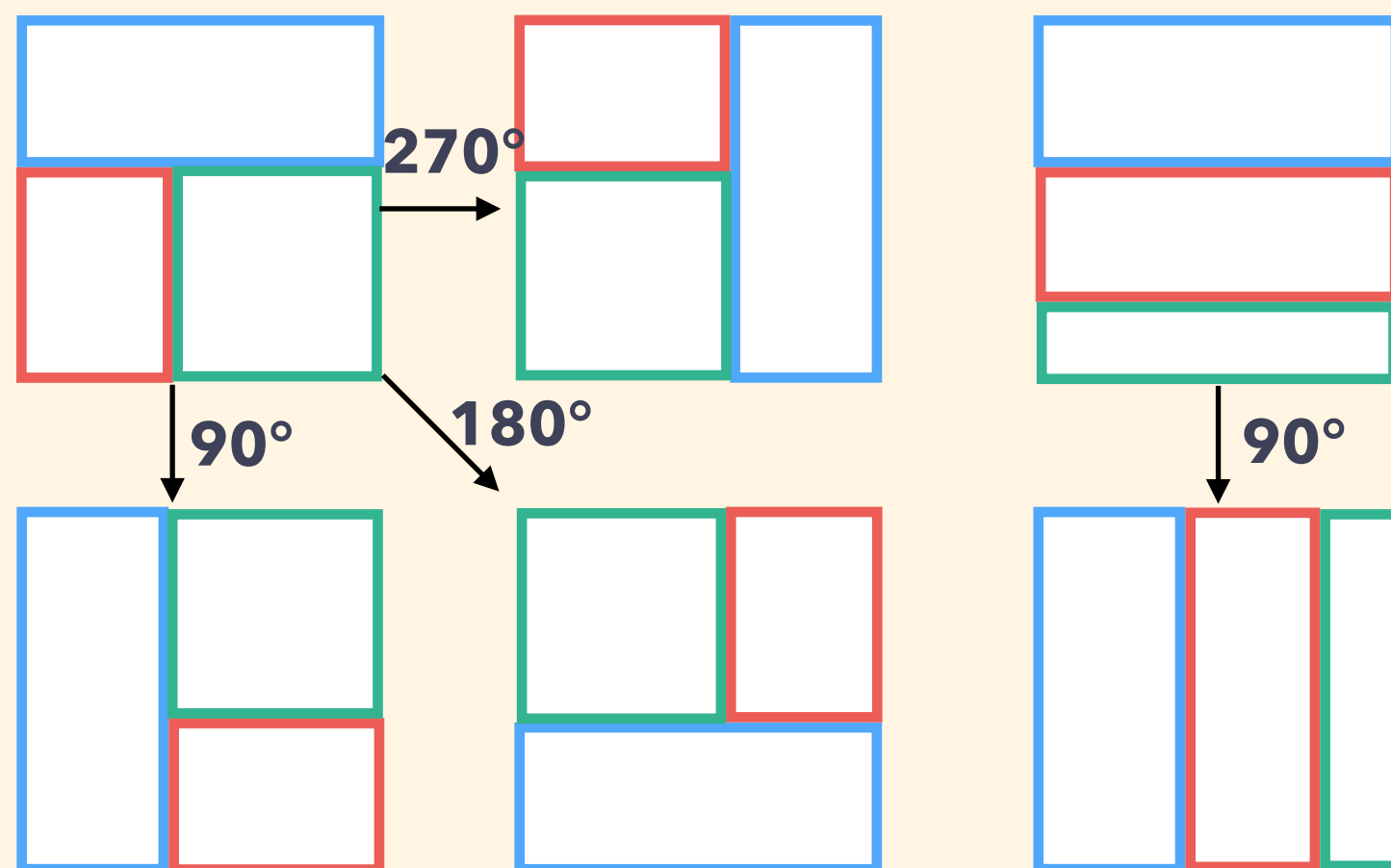
決定問題 ~N=3の場合~

- 分割の仕方が割とあるので場合分けめんどい



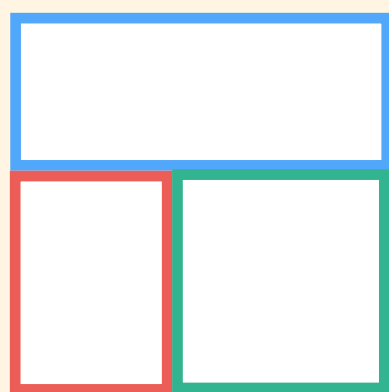
決定問題 ~N=3の場合~

- 分割の仕方が割とあるので場合分けめんどい
- けど、よく見ると回転したただけのがある

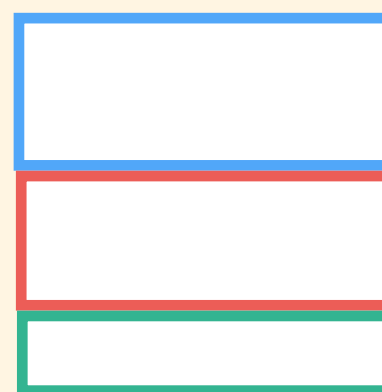


決定問題 ~N=3の場合~

- 分割の仕方が割とあるので場合分けめんどうい
- けど、よく見ると回転しただけのある



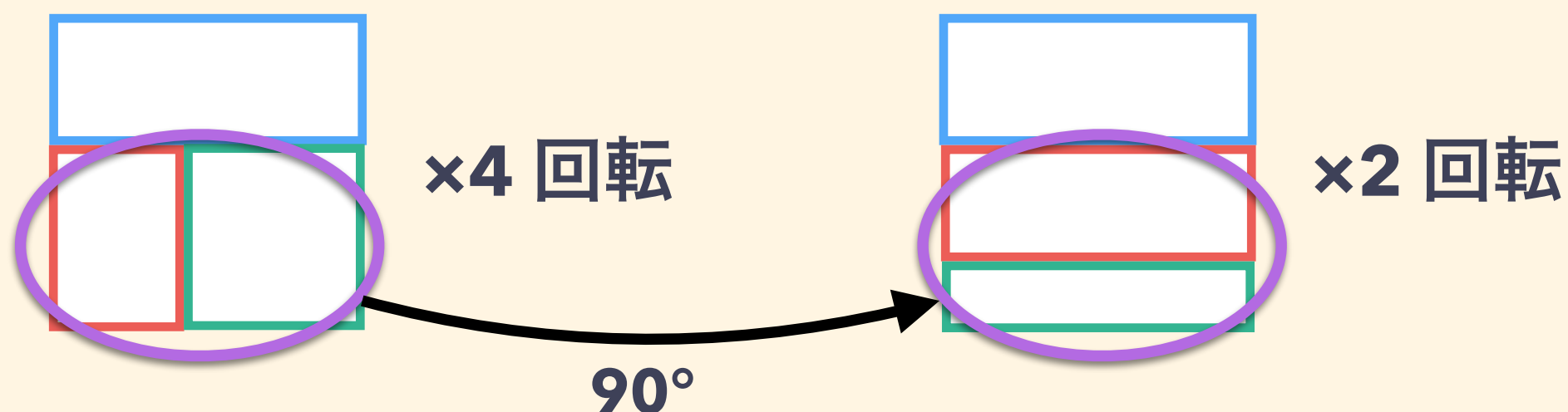
×4 回転



×2 回転

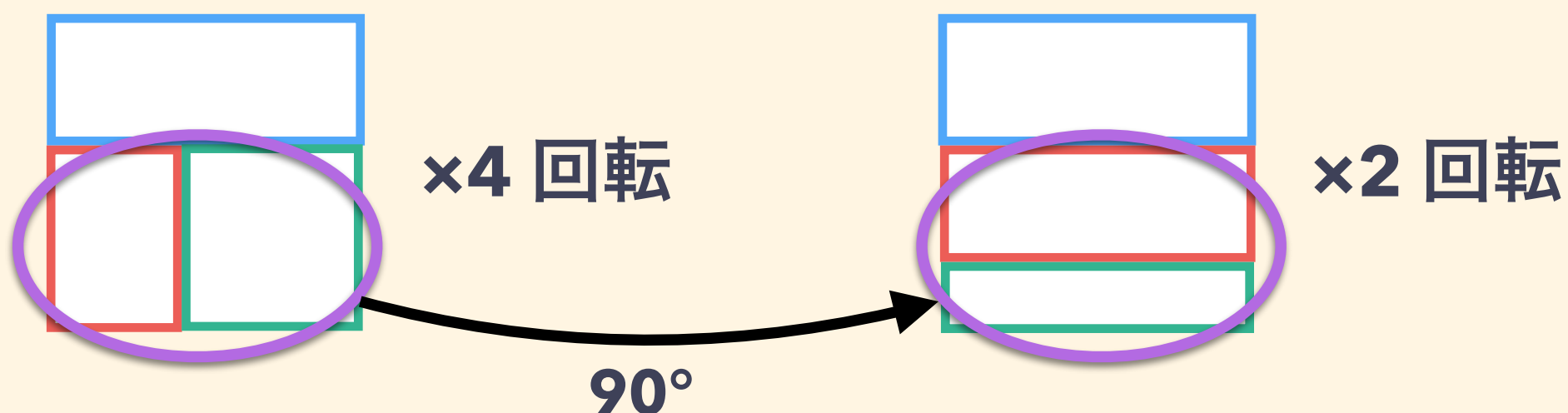
決定問題 ~N=3の場合~

- 分割の仕方が割とあるので場合分けめんどうい
- けど、よく見ると回転しただけのがある
- さらによく見るとまた回転しただけ



決定問題 ~N=3の場合~

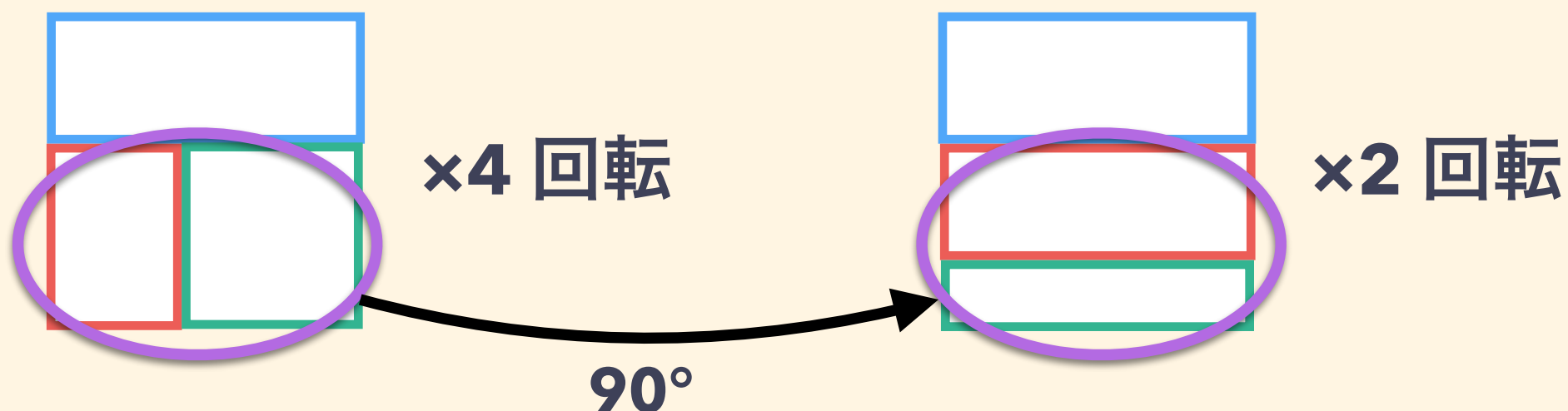
- つまり...土地を4回転しながら
 - 上の境界を決める (H or W通り)
 - 残りも回転させてN=2を試す ($O((H+W)^2)$)
- 全体で $O((H+W)(H+W)^2)$



決定問題 ~N=3の場合~

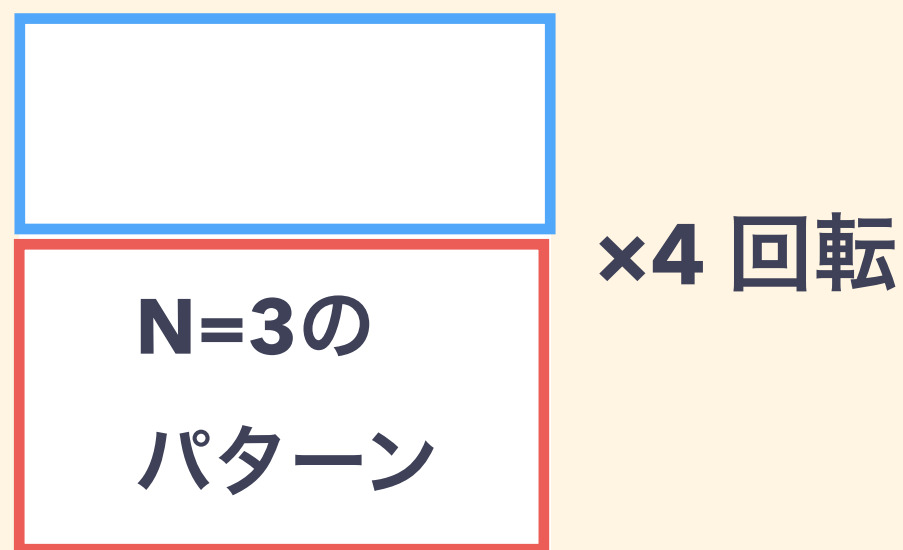
上の価値の和が
ギリギリX以上
になる境界だけ
試せば十分

- つまり...土地を4回転しながら
- 上の境界を決める (~~H or W通り~~) 1通り
- 残りも回転させてN=2を試す ($O((H+W)^2)$)
- 全体で $O((H+W)(H+W)^2)$



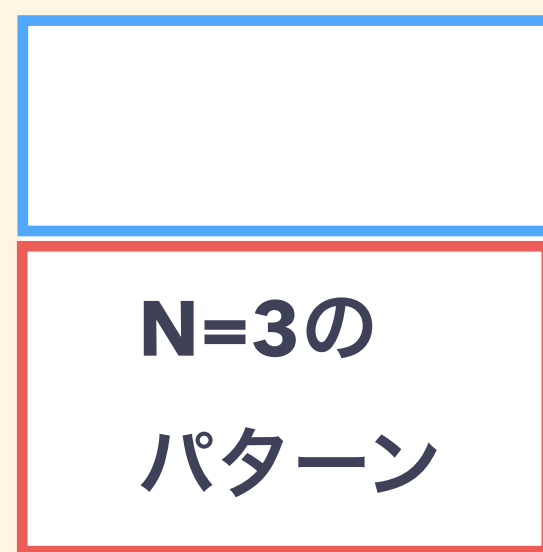
決定問題 ~N=4の場合~

- つまりこう
- N=3同様、4回転について、上の境界で和がギリギリX以上のところ1通りを試して、あとはN=3の判定を行う
- $O((H+W)^2)$

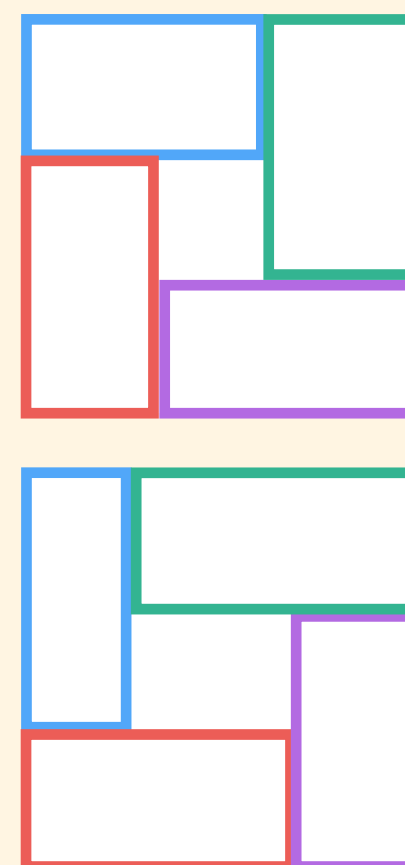


決定問題 ~N=4の場合~

- つまりこう.....だけじゃない
- やることは同じで、左上は縦の境界を決めると横の境界が一意に決まり、左下の残りの境界を決めると他の境界も一意に決まる
- $O((H+W)^2)$



×4 回転



回転でない
ので注意

解法のまとめ

- 二分探索をして、「それぞれの和がX以上になるN分割があるか？」という決定問題に変形する
- 決定問題は分割候補を試していく: $O((H+W)^2)$
 - 回転を考えると楽
 - 境界をギリギリに決め打ちすると計算量が落ちる
 - N=4 だけ特殊な形が出る
- 計算量は全体で $O((H+W)^2 \log(\sum a_{i,j}))$
- 回転や境界条件などバグりやすいポイントが多く、実装も重めなので頑張りましょう

ジャッジ解

- 井上 (C++) : 115 行, 2214 Bytes
- 澤 (C++) : 155 行, 5143 Bytes

統計情報

- AC / Submissions
 - 10 / 88 (11%)
- AC / Trying Teams
 - 10 / 22 (45%)
- First AC
 - tempura (66:52)