

ACM-ICPC Japan Alumni Group

2015年夏合宿Day4

F : Marching Course

原案：田中
ストーリー：井上

問題概要

頂点数 N , 辺数 M の無向グラフがあり、それぞれの辺は長さ d_i と 観客数 v_i を持つ。

辺 i 上を m 分間移動したとき、印象度 $m * v_i / d_i$ が得られる。

このグラフ上を、頂点 1 からスタートして 分速 1 で移動し、 P 分間以内で頂点 1 に戻るときの印象度の最大値を求めよ。移動は辺の途中でUターンしても良い。

$N \leq 200$, $P \leq 1000$, $d_i \leq 1000$, $v_i \leq 1000$

準備

辺 i について、 $e_i = v_i / d_i$ を辺の **印象密度** と呼ぶことにする。

最適解の形を限定する(1)

最適な解として考える必要があるコースの形は、以下のように限定できる。

(I) 最適なコースとしては、時間 $P/2$ だけ進んだ後にUターンして、前半と同じ経路を逆向きに戻るようにものだけを考えれば十分

略証：もし前半と後半で印象度が違っていたら、多い方だけを使うようにすれば良い。前半と後半で印象度が同じなら、中間地点でUターンしても結果は変わらない

以降は、「ノード₁に戻る」の制約は気にせず、「時間 $P/2$ のコース（終点は任意）で得られる印象度の最大値」を求める問題を考える。

最適解の形を限定する(2)

(II) 最適なコースとしては、頂点 1 からある頂点 x に単純道で到達し、その後は x と x に隣接するある頂点 y の間をひたすら往復する、そして辺 $x-y$ の印象密度は頂点 1-頂点 x 間の経路上のどの辺の印象密度よりも大きい、というものだけを考えれば十分。

略証：もし経路の途中で印象密度が辺 $x-y$ のもの以上の辺を使っていたとしたら、そこを往復するようにした方がより良いコースになる。

単純道でない場合は、回り道するのをやめてその分の時間を $x-y$ 間の往復に使った方がより良いコースになる。

解法

x を固定して考える。

すると、 y としては x から出ている辺のうちで印象密度が最大のもので出ている先を使うのがよい。

頂点 1 から頂点 x までの最適コースを決めたい。

解法

辺 $x-y$ の印象密度を E とする。

もし時間 $P/2$ をすべて $x-y$ 間の往復に使うとしたら、得られる印象度は $E * (P/2)$ になる。

頂点 1 から頂点 x へ移動する過程で辺 i を通る場合、印象度の合計は上記の $E * (P/2)$ から

(辺 i の通過で得られる印象度)

- ($x-y$ 間の往復時間減少で失われる印象度)

$$= v_i - E * d_i$$

だけ変化する。

解法

この印象度の減少をできるだけ小さく抑えたいという問題は、辺コストを $-(v_i - E * d_i)$ とした頂点 1 から頂点 x への **最短路問題** と見なせる。

※最短路問題は印象密度が E より小さい辺のみを抽出したグラフ上で解けば良いので、辺コストは正だとして問題ない

結果、 $E * (P/2) - (\text{最短路問題の解})$ が、 x を固定したときの最適な印象度になる。

全ての頂点を x としてこのアルゴリズムを実行し、その中で最良のものを答えとする。

計算量：最短路問題を解く部分の計算量に応じて $\Theta(N^3)$ や $\Theta(NM \log N)$ など

解法

この印象度の減少をできるだけ小さく抑えたいという問題は、辺コストを $-(v_i - E * d_i)$ とした頂点 1 から頂点 x への **最短路問題** と見なせる。

※最短路問題は印象密度が E より小さい辺のみを抽出したグラフ上で解けば良いので、辺コストは正だとして問題ない

結果、 $E * (P/2) - (\text{最短路問題の解})$ が、 x を固定したときの最適な印象度になる。

全ての頂点を x としてこのアルゴリズムを実行し、その中で最良のものを答えとする。

計算量：最短路問題を解く部分の計算量に応じて $\Theta(N^3)$ や $\Theta(NM \log N)$ など

ジャッジ解

- 田中 87行 1874Byte (Java)
- 井上 73行 1422Byte (C++)
- 澤 73行 1983Byte (C++)
- 古賀 83行 2055Byte (C++)

統計情報

Submit : 17チーム / 30回

Accept : 14チーム

First Accept : Kut_Pioneer (105:28)