

問題B

Card Game Strategy

原案：保坂

解答：保坂・中須賀

解説：中須賀

問題概要

- カードが n 枚あり、 i 番目のカードには整数 x_i が書かれている
- Aliceが a 以上 b 以下の整数 t を選び、その後Bobがカードを k 枚選ぶ。ここで選ばれた k 枚のカードに書かれている整数の合計を u とする。
 - この時、Bobは $|t - u|$ を最小にするようにカードを選ぶ。
 - Aliceは、Bobがそのようにカードを選んだ時の $|t - u|$ が最大となるように t を選ぶ
- Aliceが選んだ数 t とBobが選んだ k 枚のカードを答えよ
- $1 \leq k \leq n \leq 600, 0 \leq a \leq b \leq 180000, 0 \leq x_i \leq 300$

考察

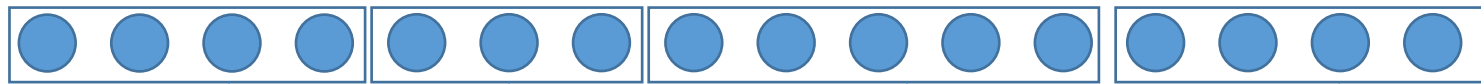
- まず、 n 枚のカードのうち k 枚を選んで、和を $1\sim b$ それぞれに出来るかどうかを調べる必要がある
 - その後は単純なDPを行うことで、「最も近い作ることが可能な整数までの距離が最も大きい整数(Aliceが選ぶべき t)」を求めることができる
- 普通にナップザックDPを行うとメモリ・計算量ともに $O(nks)$ となってアウト

方針

- まずは n 枚のうち最初の k 枚を選んでいるとして、その後「 $k + 1$ 枚目以降から1枚追加する」「 k 枚目までから1枚捨てる」を繰り返す
 - $n = 7, k = 3$ だとしたら、例えば以下のようなになる
 - 最初は1~3枚目を持っている
 - 4枚目は追加しない
 - 5枚目は追加する
 - 1枚目は捨てる
 - 6枚目は追加しない
 - 7枚目は追加する
 - 2枚目は捨てない
 - 3枚目は捨てる
 - 最終的に、2,5,7枚目が選ばれる

解法

- $F_s(i, j, y)$ を、 $1 \sim i$ 枚目から何枚か捨てて $k + 1 \sim j$ 枚目のうちから何枚か追加して $k + s$ ($s = 0, 1$)枚選んだ時に合計を y に出来るかという bool関数とする



$x_{i+1} \sim x_k$:絶対使う

$x_{j+1} \sim x_n$:絶対使わない

$x_1 \sim x_i$:使っても使わなくてもいい $x_{k+1} \sim x_j$:使っても使わなくてもいい

$F_s(i, j, y)$:上の図で、全体で $k + s$ 枚選んで合計を y にできるか

- しかし、これをそのままDPするのは $O(n^2 \cdot s)$ で遅い

解法

- $F_s(i, j, y)$ は i, j に対して単調であるので、 $f_s(j, y)$ を「 $F_s(i, j, y)$ が $true$ となる最小の i 」とおくことができる。これを用いてDPを行う。
 - $f_0(j, y)$ からは $f_s(j + 1, y)$ または $f_1(j + 1, y + x_{j+1})$ に遷移
 - $f_1(j, y)$ からは $f_1(j, y) \leq i \leq k$ となる全ての i について $f_0(j, y - x_i)$ に遷移すると遅いが、 F_s の j についての単調性により、 $f_1(j, y) \leq i \leq f_1(j - 1, y)$ となる i についてのみ調べれば十分である
- これで $O(ns)$ となり、解くことができる
 - 後は各 $f_s(j, y)$ がどこから来たかを覚えておいて復元する
 - メモリ制限が苦しいので、2byte整数(C++ならshort)を使うなどで対応する

ジャッジ解

- 保坂 : 127行, 3201byte (Java)
- 中須賀 : 95行, 2352byte (C++)

結果

- Accepted / Submission
 - 1/ 14 (7%)
- First AC
 - すめけブースター feat. GUMI (272min 46sec)